



המחשב בעקבות גאוס: חישוב הסכום של פולינום

קרל פרידריך גאוס (1777-1855) היה מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים. האגדה מספרת כי הוא מצא את הנוסחה לסכום של סדרות חשבוניות כשהיה בן שש.

נניח כי נתון לנו פולינום $p(n)$ עם מקדמים שלמים. נסמן

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

בשאלה זו אתם מתבקשים לכתוב אלגוריתם המוצא נוסחה של סכום

של פולינום $p(n)$, כלומר לכתוב אלגוריתם שמחשב את הנוסחה של

$$A(m) = \sum_{n=0}^m \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

לדוגמה, אם הפולינום $p(n) = n$, אזי התשובה של האלגוריתם צריכה להיות



$$A(m) = \frac{m(m+1)}{2}$$

פתרון:

יש מספר אלגוריתמים שפותרים את הבעייה. נתאר אחד אלגוריתמים וניתן רמז לשני.

אלגוריתם 1:

הרעיון מאחורי האלגוריתם הראשון הוא ההבחנה $A(m)$ הוא פולינום ממעלה $d+1$ כלומר אנחנו מנחשים שנסחה של $A(m)$ היא:

$$A(m) = \sum_{i=0}^{d+1} \beta_i m^i$$

כעת ניתן לרשום מערכת משוואות לינארית ולחשב את המקדמים $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{d+1}\}$

באופן הבא:

$$A(1) = \sum_{i=0}^{d+1} \beta_i 1^i, A(2) = \sum_{i=0}^{d+1} \beta_i 2^i, \dots, A(d+1) = \sum_{i=0}^{d+1} \beta_i (d+1)^i$$

זאת מערכת משוואות לינארית שיש לה פיתרון אחד!
ניתן רמז לאלגוריתם 2:

אפשר להשתמש צורת לגראנז' ראה [קישור](#)