

תלת מאזניים - הפתרון



ציור 1: תלת מאזניים בגינת שעשועים

בחודש שעבר, בהשראת חודש הסליחות, התבקשתם לחשב כמה שקילות נצטרך כדי למצוא מטבע מזויף אחד מבין k מטבעות, כאשר משתמשים בתלת מאזניים - מכשיר בעל שלוש כפות. בהקשר זה, נזכיר שכאשר המשוואות הם דו ממדיות או תלת ממדיות, תלת המאזניים משמר את המומנט של המשקל לפי חוקי המנוף: $m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 = 0$

פתרון

נסתכל על מספר מקסימלי של מטבעות עבורו ניתן למצא מטבע מזויף יחד בשקילה בודדת. במקרה זה, קל לראות כי המספר הוא 4 – שמים מטבע אחד על כל אחת מכפות המאזניים. אם המאזניים מאוזנות – המטבע המזויף הוא המטבע הרביעי. אם הן לא מאוזנות, כלומר אחד המטבעות קל או כבד יותר – הרי שהוא המטבע המזויף.

באופן כללי, אם יש 4^k מטבעות, אפשר למצא את המטבע המזויף ב- k שקילות, באופן הבא: מחלקים את המטבעות ל-4 קבוצות שוות, שבכל אחת מהן יש 4^{k-1} מטבעות. שוקלים שלוש קבוצות על תלת המאזניים. אם המאזניים מאוזנים – ממשיכים ברקורסיה עם הקבוצה שלא שקלנו. אם הם לא מאוזנים – ממשיכים עם המטבעות שבכף הלא מאוזנת. מחלקים את המטבעות הקבוצה הנבחרת לארבע, שוקלים מחדש וכך עד שמוצאים את המטבע שמשקלו שונה.