



שורשים במעגל

ב-25.10 צוינו 210 שנים להולדתו של המתמטיקאי הצרפתי אווריסט גלואה. סיפור חייו של גלואה הוא מהמרתקים בתולדות המדע, ואני ממליץ בחום לקרא את הערך עליו בוויקיפדיה ([אווריסט גלואה](#)). בעקבות תורת גלואה אנו יודעים כי לא ניתן למצוא נוסחאות שורשים לפולינומים ממעלה גדולה מ-4. מצד שני עבודת הדוקטורט של [קרל פרידריך גאוס](#) (המשפט היסודי של האלגברה) מראה כי לכל פולינום ממעלה n יש n שורשים מעל שדה המספרים המרוכבים. אחת הדרכים להתמודד עם הקונפליקט שנוצר בין שתי התאוריות ([תורת גלואה והמשפט היסודי של האלגברה](#)) היא לחפש מעגלים שמקיפים את השורשים. בחידה היום נתבונן על פולינומים המגיעים מסדרות רקורסיביות הומוגניות.

נתונה לנו סידרה רקורסיבית הומוגנית

$$a[n + 1] = \sum_{k=0}^m \alpha_k a_{n-k}$$

נסתכל על הפולינום $P[z]$ שדה המספרים המרוכבים

$$P_n[z] = \sum_{i=0}^n a[2n - i] z^i$$

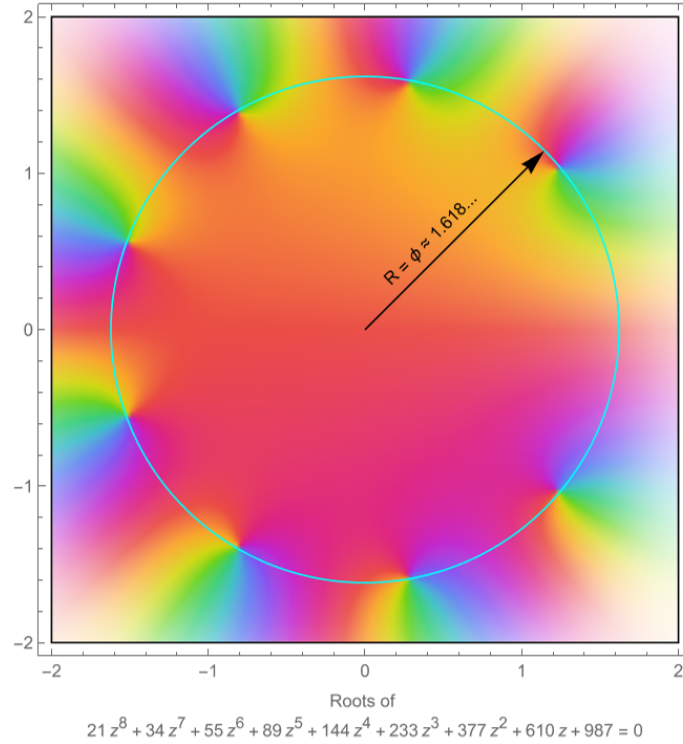
חשב את הרדיוס המקסימלי של המעגל שמרכזו בראשית ולא מכיל שום שורר של הפולינום $P_n[z]$

לדוגמה עבור הסדרת פיבונאצ'י

$$F[n + 1] = F[n] + F[n - 1]$$

$$P_8[z] = 987 + 610z + 377z^2 + 233z^3 + 144z^4 + 89z^5 + 55z^6 + 34z^7 + 21z^8$$

מעריך השורשים נראה כך:



השורשים של הפולינום $P_8[z]$ הם:

- $\{z \rightarrow -1.5206999342167529 - 0.5533936730576086i\}, \{z$
- $\rightarrow -1.5206999342167529 + 0.5533936730576086i\}, \{z$
- $\rightarrow -0.8091770294735148 - 1.4012803003327965i\}, \{z$
- $\rightarrow -0.8091770294735148 + 1.4012803003327965i\}, \{z$
- $\rightarrow 0.280888874430703 - 1.5934995146652342i\}, \{z$
- $\rightarrow 0.280888874430703 + 1.5934995146652342i\}, \{z$
- $\rightarrow 1.2394642797357551 - 1.0400886007598944i\}, \{z$
- $\rightarrow 1.2394642797357551 + 1.0400886007598944i\}$

והרדיוס קרוב ל חתוך הזהב.