הפקולטה להנדסה
ע"ש אלכסנדר קופקין
אוניברסיטת בר־אילן

פולינומים של הליכה אקראית ומרטינגל: הפתרון

בחודש שעבר, בו צוין יום הולדתו של המתמטיקאי ג'וזף דוב, מהראשונים שהגדירו את המושג מרטינגל, ביקשנו מכם לחשב מרטינגל ספציפי.

תיארנו את התהליך הבא:

$X_1, \dots, X_n \dots$ הם משתנים בלתי תלויים שווי התפלגות כך ש $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 1/2$

הגדרנו את התהליך: $T_n^k = S_n^k = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^k$,

ואתם התבקשים להשתמש במשפט הפירוק של דוב ולחשב את המרטינגל:

$$\boldsymbol{M_n = T_n^k + A_n}$$

פתרון:

נסמן את

$$S_n^k = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^k$$

כעת נחשב את

$$\boldsymbol{E}\left[S_{n+1}^k \middle| S_n^k\right] = \boldsymbol{E}\left[(S_n + X_{n+1})^k \middle| S_n^k\right]$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{k}} \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{E}\left[(S_n)^{k-i} X_{n+1}^i \middle| S_n^k\right]$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{k}} \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{E}\left[(S_n)^{k-i} \middle| S_n^k\right] \boldsymbol{E}\left[X_{n+1}^i \middle| S_n^k\right] =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{\frac{k}{2}}} \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{E}\left[(S_n)^{k-2i} \middle| S_n^k\right] \boldsymbol{E}\left[X_{n+1}^{2i} \middle| S_n^k\right]$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{\frac{k}{2}}} \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{E}\left[(S_n)^{k-2i} \middle| S_n^k\right]$$

ולכן המרטינגל הוא הסיבה שיש להכפיל ב- n היא שיש לנו סכום טלסקופי.

$$\boldsymbol{S_n^k - n}\left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{\frac{k}{2}}} \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{E}\left[(S_n)^{k-2i} \middle| S_n^k\right]\right)$$

והחלק ה Predictable process הוא $\boldsymbol{n}\left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{\frac{k}{2}}} \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{E}\left[(S_n)^{k-2i} \middle| S_n^k\right]\right)$