מטריצה ופטריצה

אחד מהמשפטים החשובים באלגברה לינארית הוא מפשט קיילי-המילטון המשפט אומר כי כל מטריצה ריבועית מעל שדה F מאפסת את הפולינום האופיניה שלה

$$\mathrm{P}(x) = \det(xT - A)$$

כאשר הכפל של מטריצה $A = [a_{i,j}], B = [b_{i,j}]$ מוגדר באופן הבא:

$$C = [c_{i,j}] = AB$$

כאשר

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

בחידה היום אנו נשנה את הגדרת הכפל עבור מטריצות

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} \end{bmatrix}$$

להיות

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}\beta_{1,1} & \alpha_{1,1}\beta_{1,2} + \alpha_{1,2}\beta_{2,2} & \alpha_{1,1}\beta_{1,3} + \alpha_{1,3}\beta_{3,3} \\ \alpha_{2,1}\beta_{1,1} + \alpha_{2,2}\beta_{2,1} & \alpha_{2,2}\beta_{2,2} & \alpha_{2,2}\beta_{2,3} + \alpha_{2,3}\beta_{3,3} \\ \alpha_{3,1}\beta_{1,1} + \alpha_{3,3}\beta_{3,1} & \alpha_{3,2}\beta_{2,2} + \alpha_{3,3}\beta_{3,2} & \alpha_{3,3}\beta_{3,3} \end{bmatrix} = AB$$

מצא נוסחה לפולינום המאפס של A כלומר נרצה לחשב פולינום

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$$

כך ש

$$P(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

פתרון:

הפתרון של החידה פשוט מאוד: הפולינום שמאפס את המטריצה A הוא

$$\mathrm{P}(x) = (x - a_{1,1})(x - a_{2,2})(x - a_{3,3})$$

כדי לחשב זאת מה שאנו צריכים לעשות הוא לחשב את

$$\mathrm{A}^0, \mathrm{A}^1, \mathrm{A}^2, \mathrm{A}^3$$

כעט אפשר לרשום את מערכת המשוואות

$$\alpha_0\mathrm{A}^0 + \alpha_1\mathrm{A}^1 + \alpha_2\mathrm{A}^2 + \alpha_3\mathrm{A}^3 = 0$$

זאת מערכת משוואת עם 3 נעלמים ו-9 משוואות, והפתרון של המערכת נותן לנו את התשובה.