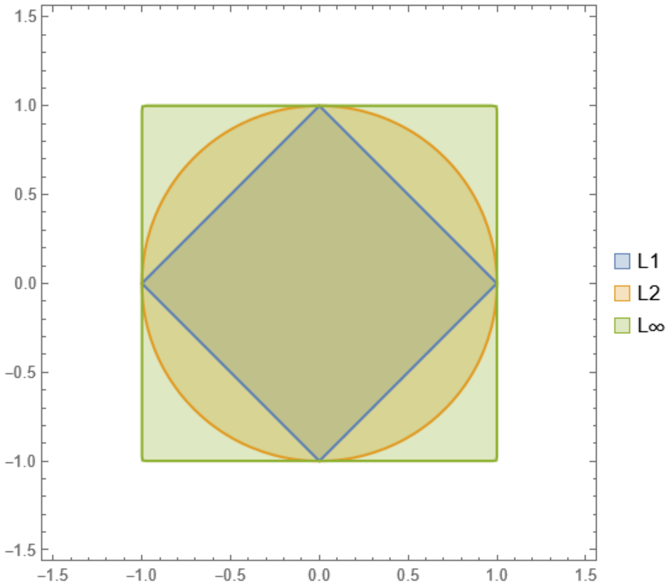
פתרון החידה של חודש ינואר

אורך של עקומה

בחודש שעבר, שבתחילתו חגגנו את תחילתה של השנה האזרחית החדשה, ניסינו לדמיין לנו עולם בו המסלול של כדור הארץ הוא לא לפי L2 אלה לפי נורמה L1 או נורמה L_∞, ולחשב בו אורך של עקומה.



ציור 1:אוסף נקודות במרחק 1 לפי הנורמות השונות

כזכור קיימת נוסחה סגורה אינטגרלית לחישוב אורך של עקומה:

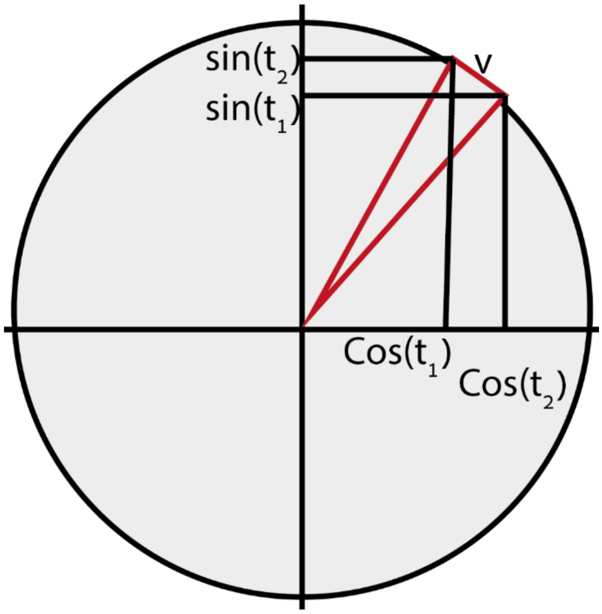
$$S(t)=\int_0^t \sqrt{1+(f(x)')^2}dx$$

אבל, אם נסתכל על ההוכחה של הנוסחה הזאת, נגלה שהיא נכונה רק לנורמה L2. אז לכן, בחידה ביקשנו לחשב אורך של עקומה לפי נורמה L1 או נורמה L_∞ של הפונקציות הבאות:

1. העקומה היא $(x,y)=(\sin(t),Cos(t))$ היקף של מעגל. אבל כאשר אנו מחשבים את האורך בנורמות L1 או נורמה L_∞.
2. העקומה היא $(x,y)=(t,t^n)$. אבל כאשר אנו מחשבים את האורך בנורמות L1 או נורמה L_∞.

פתרון:

ראשית נסתכל על הציור הבא:



ציור 1:

מציור 1 נובע כי הווקטור של אורך העקומה הוא:

$$v = (\mathrm{Cos}(t_1)\,,\mathrm{sin}(t_1)) - (\mathrm{Cos}(t_2)\,,\mathrm{sin}(t_2)) = (\mathrm{Cos}(t_1) - \mathrm{Cos}(t_2)\,,\mathrm{sin}(t_1) - \mathrm{sin}(t_2))$$

כעת נציב

$$t_1 = t_2 + \varepsilon$$

ונחלק ונכפיל ב-ε , נסכום ונקבל

$$\sum \left\| \left(\frac{\mathrm{Cos}(t_2 + \epsilon) - \mathrm{Cos}(t_2)}{\epsilon}, \frac{\mathrm{sin}(t_2) - \mathrm{sin}(t_2)}{\epsilon} \right) \epsilon \right\| = \int_0^{2\pi} \left\| \left(\frac{dCos(t)}{dt}, \frac{dSin(t)}{dt} \right) \right\| dt$$

ולכן נקבל כי עבור L1

$$\int_0^{2\pi} \left\| \left(\frac{dCos(t)}{dt}, \frac{dSin(t)}{dt} \right) \right\|_1 dt = \int_0^{2\pi} |Sin(t)| + |Cos(t)| dt = 8$$

ועבור L∞ נקבל

$$\int_0^{2\pi} \left\| \left(\frac{dCos(t)}{dt}, \frac{dSin(t)}{dt} \right) \right\|_\infty dt = \int_0^{2\pi} maxx\{|Sin(t)|, |Cos(t)|\} dt = 4\sqrt{2}$$

באותו אופן אנו מקבלים אפשר לפתור את סעיף ב עבור t>0

$$\int_0^t \left\| \left(\frac{dx}{dx}, \frac{dx^n}{dx} \right) \right\|_1 dx = \int_0^t |1| + |nx^{n-1}| dx = t + t^n$$

$$\int_0^t \left\| \left(\frac{dx}{dx}, \frac{dx^n}{dx} \right) \right\|_\infty dx = \int_0^t \max\{|1|, |nx^{n-1}| dx = \begin{cases} t & t \leq 1 \\ t^n & t > 1 \end{cases}$$